ARITMETICA

Numeri naturali

☺ ripassiamo

- L'insieme dei numeri naturali è formato dai numeri interi e positivi e si indica con la lettera **N**
- In **N** si eseguono le quattro operazioni elementari: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione che godono delle seguenti proprietà:

Operazione	***Proprietà***	***Esempi***
Addizione	► Interna a **N** (ovvero la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale) ► Commutativa $a + b = b + a$ ► Associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$ ► Esiste l'elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$	 $2 + 3 = 3 + 2$ $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ $3 + 0 = 0 + 3 = 3$
Sottrazione	► **Non** interna a **N** ► **Non** commutativa ► **Non** associativa ► Invariantiva: la differenza di due numeri naturali non cambia se a entrambi si aggiunge o si toglie (purché sia possibile effettuare la sottrazione in **N**) uno stesso numero $a - b = (a + c) - (b + c)$ $a - b = (a - c) - (b - c)$	$5 - 7$ non è eseguibile in **N** $3 - 2 \neq 2 - 3$ $(5 - 3) - 2 \neq 5 - (3 - 2)$ $7 - 4 = (7 + 3) - (4 + 3)$ $7 - 4 = (7 - 3) - (4 - 3)$
Moltiplicazione	► Interna a **N** (ovvero il prodotto di due numeri naturali è sempre un numero naturale) ► Commutativa $a \cdot b = b \cdot a$ ► Associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ► Esiste l'elemento neutro $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ► Esiste l'elemento assorbente $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ► Distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione a sinistra $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ a destra $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$ ► Legge di annullamento del prodotto $a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$	 $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$ $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$ $2 \cdot 0 = 0 \cdot 2 = 0$ $2 \cdot (10 \pm 15) = 2 \cdot 10 \pm 2 \cdot 15$ $(6 \pm 7) \cdot 8 = 6 \cdot 8 \pm 7 \cdot 8$
Divisione	► **Non** interna a **N** ► **Non** commutativa ► **Non** associativa ► Distributiva a destra (ma **non** a sinistra)rispetto all'addizione $(a + b) : c = a : c + b : c$ (purché tutte le divisioni siano possibili in **N**) ► Invariantiva: il quoziente di due numeri naturali non cambia se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi (purché sia possibile effettuare la divisione in **N**) per uno stesso numero diverso da 0	$5 : 7$ non è eseguibile in **N** $4 : 2 \neq 2 : 4$ $(12 : 6) : 2 \neq 12 : (6 : 2)$ $(36 + 27) : 9 = 36 : 9 + 27 : 9$ $(36 : 9) = (36 \cdot 3) : (9 \cdot 3)$ $(36 : 9) = (36 : 3) : (9 : 3)$

<u>IMPORTANTE</u> Una divisione in cui il divisore è 0 non è definita, quindi scritture del tipo: $6 : 0$ $11 : 0$ $50/0$ <u>NON HANNO SIGNIFICATO</u>

Una divisione in cui il dividendo è 0 (e divisore diverso da 0) dà come quoziente 0 $0 : 6 = 0$ $0 : 11 = 0$ $0/50 = 0$

ESERCIZI:

1. Compila le seguenti tabelle eseguendo, se possibile, le operazioni indicate nell'insieme **N**

+	2	8	1	0
4				
0				
3				
6				

–	2	8	1	0
4				
0				
3				
6				

2. Completa le seguenti scritture inserendo al posto dei puntini dei numeri diversi da 0

   a) 14 = ...+........ =........ + ...

   b) 107= ....+........+.......+.......+.......+...........

   c) 39 = ...+........+......+.......+.......+........+........ =........+..........

3. Scrivi tutte le possibili coppie di numeri naturali il cui prodotto è 32

4. ***Vero o Falso?***

	V	F
a) (10 +2) – (8 + 2) = 10 – 8	☐	☐
b) 99 : 9 = (99 : 3) : (9 : 3)	☐	☐
c) 99: (9 + 3) = 99 : 9 + 99 : 3	☐	☐
d) (99 + 9) : 9 = 99 : 9 + 9 : 9	☐	☐
e) 11 · (99 – 99) = 11	☐	☐
f) 0 : (9 + 1) è una scrittura priva di significato	☐	☐
g) 9 : 0 è una scrittura priva di significato	☐	☐
h) (10 +15) · 5 = 5 ·15+ 10 ·5	☐	☐
i) 280 : 70 = 140 : 35	☐	☐
j) 280 : 70 = 300 : 90	☐	☐

Esegui facendo attenzione alla priorità delle operazioni

5.	$30 + 30 : (11 + 3 + 9 + 7) + 6 - 2 \cdot (10 - 7)$	31
6.	$20 + 6 : (12 - 9) - 5 \cdot (4 - 2) - 12$	0
7.	$15 : [3 + 5 \cdot (19 - 17) - 48 : 6]$	3
8.	$[16 : (14 - 6 \cdot 2) + 28 : 7] : (6 \cdot 7 - 5 \cdot 8)$	6
9.	$12 - 3 \cdot \{12 - 3 \cdot [12 - 3 \cdot (12 - 3 \cdot 3)]\}$	3
10.	$4 \cdot [3 - (7 - 2 \cdot 3)] - \{15 + 12 : [13 - 6 \cdot (8 - 6)] - 24 : 6 : 2\} : 5$	3

Numeri relativi

☺ ripassiamo

- L'insieme dei numeri relativi è formato dai numeri interi, sia positivi che negativi , e si indica con la lettera **Z.** (es. $+2; -3; -7; +15$)
- Due numeri relativi si dicono **concordi** quando sono preceduti dallo stesso segno. (es. $+5$ e $+8$; -2 e -3)
- Due numeri relativi si dicono **discordi** quando sono preceduti da segni opposti. (es. $+5$ e -8 ; -2 e $+3$)
- Il **valore assoluto** di un numero relativo è il valore numerico del numero stesso preso comunque con segno positivo (es. $|-5| = 5$; $|+3| = 3$)
- Due numeri relativi si dicono **opposti** quando hanno lo stesso valore assoluto ma sono preceduti da segni opposti. (es. $+5$ e -5 ; -2 e $+2$)
- In **Z** si eseguono le quattro operazioni elementari: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione che godono delle seguenti proprietà:

Operazione	***Proprietà***	***Esempi***
Addizione	► Interna a **Z** (ovvero la somma di due numeri relativi è sempre un numero relativo) ► Commutativa $a + b = b + a$ ► Associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$ ► Esiste l'elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$	$-2 + 3 = +3 - 2$ $(-2 + 3) + 5 = -2 + (3 + 5)$ $3 + 0 = 0 + 3 = 3$
Sottrazione	► E' interna a **Z** ► **Non** commutativa ► **Non** associativa ► Invariantiva: la differenza di due numeri relativi non cambia se a entrambi si aggiunge o si toglie uno stesso numero $a - b = (a + c) - (b + c)$ $a - b = (a - c) - (b - c)$	$+5 - 7$ è eseguibile in **Z** $(+3) - (-2) \neq (-2) - (+3)$ $(+5 - 3) - 2 \neq +5 - (+3 - 2)$ $7 - 4 = (7 + 3) - (4 + 3)$ $7 - 4 = (7 - 3) - (4 - 3)$
Moltiplicazione	► Interna a **Z** (ovvero il prodotto di due numeri relativi è sempre un numero relativo) ► Commutativa $a \cdot b = b \cdot a$ ► Associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ► Esiste l'elemento neutro $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ► Esiste l'elemento assorbente $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ► Distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione a sinistra $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ a destra $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$ ► Legge di annullamento del prodotto $a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$	$(+2) \cdot (-3) = (-3) \cdot (+2)$ $(-2 \cdot 3) \cdot 5 = -2 \cdot (3 \cdot 5)$ $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$ $2 \cdot 0 = 0 \cdot 2 = 0$ $2 \cdot (10 \pm 15) = 2 \cdot 10 \pm 2 \cdot 15$ $(6 \pm 7) \cdot 8 = 6 \cdot 8 \pm 7 \cdot 8$
Divisione	► **Non** interna a **Z** ► **Non** commutativa ► **Non** associativa ► Distributiva a destra (ma **non** a sinistra)rispetto all'addizione $(a + b) : c = a : c + b : c$ (purché tutte le divisioni siano possibili in **Z**) ► Invariantiva: il quoziente di due numeri naturali non cambia se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi (purché sia possibile effettuare la divisione in **Z**) per uno stesso numero diverso da 0	$5 : 7$ non è eseguibile in **Z** $(-4) : (+2) \neq (+2) : (-4)$ $(12 : 6) : (-2) \neq 12 : (6 : (-2))$ $(-3 + 27) : 9 = -3 : 9 + 27 : 9$ $(36 : 9) = (36 \cdot 3) : (9 \cdot 3)$ $(36 : 9) = (36 : 3) : (9 : 3)$

IMPORTANTE: La somma di due numeri relativi concordi è un numero relativo che ha:

- valore assoluto = alla somma dei valori assoluti
- segno concorde con quelli dei numeri di partenza

ESEMPIO $(-4) + (-5) = -9$ $(+4) + (+5) = +9$

La somma di due numeri relativi discordi è un numero relativo che ha:

- valore assoluto = alla differenza dei valori assoluti
- segno concorde con quello del numero avente valore assoluto maggiore

ESEMPIO $(+4) + (-5) = -1$ $(-4) + (+5) = +1$

Il prodotto di due numeri relativi concordi è un numero relativo che ha:

- valore assoluto = al prodotto dei valori assoluti
- segno positivo $(+)\cdot(+) = +$ $(-)\cdot(-) = +$

ESEMPIO $(+4) \cdot (+5) = +20$ $(-4) \cdot (-5) = +20$

Il prodotto di due numeri relativi discordi è un numero relativo che ha:

- valore assoluto = al prodotto dei valori assoluti
- segno negativo $(+)\cdot(-) = -$ $(-)\cdot(+) = -$

ESEMPIO $(+4) \cdot (-5) = -20$ $(-4) \cdot (+5) = -20$

Il quoziente di due numeri relativi è eseguibile in **Z** solo se il dividendo è multiplo del divisore e si calcola con una regola analoga a quella del prodotto.

ESEMPIO $(+40) : (-5) = -8$ $(-40) : (-5) = +8$

ESERCIZI:

11. Dispone in ordine crescente i seguenti numeri relativi:

$-5;\ +4;\ +12;\ -1;\ -8;\ +15;\ +1;\ -18;\ +2;\ -3;\ +6$

Completa le seguenti uguaglianze in modo che risultino corrette

12. $(-8) + (+5) = \dots\dots\dots$ $(-10) + (-2) = \dots\dots\dots$
13. $(+5) - (+7) = \dots\dots\dots$ $(+4) - (-7) = \dots\dots\dots$
14. $(+5) \cdot (-6) = \dots\dots\dots$ $(-9) \cdot (-6) = \dots\dots\dots$
15. $(+42) : (-3) = \dots\dots\dots$ $(-75) : (+5) = \dots\dots\dots$
16. $(+3) \cdot (\dots\dots) = -15$ $(-2) \cdot (\dots\dots) = +6$
17. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = (+\dots\dots) \cdot (-4) = \dots\dots$
18. $[(-7) \cdot (\dots\dots)] : (-3) = (+28) : (-3) =$
19. $(-50) : [(-10) : (+5)] = (-50) : (\dots\dots) = \dots\dots$

20. Completa le seguenti tabelle

+	- 2	+ 8	+15	- 3
+13				
- 2				
- 7				
+10				

-	- 2	+ 8	+15	- 3
+13				
- 2				
- 7				
+10				

21. Completa la seguente tabella

a	b	a + b	a - b	b - a	a · b	(- a) · b	(- b) : a	2b – (-a)
2	6							
- 5		10						
	21			24				
- 4							- 5	
	- 6							- 6

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

22.	$132 : (-4) : 11 - 4 \cdot (6 + 3) : 12 - 5 : 5$	-7
23.	$(53 - 24 + 16 - 21 - 45) : (-12 : 4 - 4) - 3$	0
24.	$-1 + 2 \cdot (-3 + 4 - 5) - 4 \cdot (-6 + 2 \cdot 3) - 15 : (-5)$	-6
25.	$1 + 9 \cdot 2 - 0 \cdot [-6 + 8 \cdot 2 \cdot (-9 + 8)] : (-13)$	$+19$
26.	$-4 - 18 : (-15 : 5 \cdot 3) + [-4 + (2 \cdot 6 - 8)] - 1$	-3
27.	$[-24 : (-6) + 1] : 5 - 4 + (8 - 3) \cdot (-3) - (-5 + 12) - (-7)$	-18
28.	$[33 - 4 \cdot (6 - 9 \cdot 2) : (-2 + 5 \cdot 2)] : [-65 : (15 : 3)]$	-3
29.	$[5 \cdot (5 + 4) - 15 : (7 - 2)] : [(100 : 10 + 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3) - 3]$	$+2$
30.	$(2 + 5 + 30 : 6 \cdot 4) : 3 + [3 \cdot 3 : (150 : 2 : 25)] + (4 \cdot 100 : 20 - 10) - 8$	$+14$
31.	$(25 \cdot 2 : 5 - 7) \cdot 5 \cdot [(2 + 2 \cdot 5) - 4 \cdot (9 - 7)] : (-10)$	-6

Scrivi le espressioni che risolvono i seguenti problemi e calcolane il risultato

32. Addiziona a 4 la differenza tra – 9 e l'opposto di 2
33. Moltiplica per 5 la differenza tra la metà di 10 e l'opposto di 3
34. Al quadruplo della differenza fra 7 e 2 sottrai la metà del triplo di 6

Le potenze

☺ ripassiamo

Tipo di potenza	*Definizione*	*Esempi*
Potenza a esponente intero , positivo, maggiore di 1	$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a$ (n volte)	$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$
Potenze a esponente 1	$a^1 = a$	$3^1 = 3$
Potenze a esponente 0	$a^0 = 1$	$(-2)^0 = 1$
Potenza a esponente intero relativo	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = (-3)^2$

Attenzione

$-a^n \neq (-a)^n$ infatti $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$ e $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

Proprietà delle potenze

☺ ripassiamo

Proprietà	*In simboli*	*Esempi*
Prodotto di potenze aventi la stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^9 = 2^{3+9} = 2^{12}$
Quoziente di potenze aventi la stessa base	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$2^7 \div 2^2 = 2^{7-2} = 2^5$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$
Potenza di un prodotto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^7 = 2^7 \cdot 3^7$
Potenza di un quoziente	$(a \div b)^n = a^n \div b^n$	$(5 \div 3)^2 = 5^2 \div 3^2 = 25 \div 9$

Attenzione

$(a-b)^n \neq a^n - b^n$ es: $(4-3)^2 \neq 4^2 - 3^2$ infatti $(4-3)^2 = 1^2 = 1$ e $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ es: $(4+3)^2 \neq 4^2 + 3^2$ infatti $(4+3)^2 = 7^2 = 49$ e $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

ESERCIZI:

35. $(7-5)^2 + (2^3 - 2^2 - 2)^3 - 5\cdot2 =$ [2]
36. $[2^2 + 2 \cdot (2^2 \cdot 5 + 3)] : 25 - 3^0 =$ [1]
37. $2^2 + 3^2\cdot5^2 - 3\cdot2^4 + 7\cdot5^2 - 2^3\cdot5^2 - 2^2\cdot3^3 =$ [48]
38. $3^2 + 2^2 \cdot [(3 \cdot 2^2 : 3 + 5 \cdot 2^2) : 6 + 1^5] =$ [29]
39. $2^2 \cdot [(2^2 \cdot 3 : 3 + 5 \cdot 2^2) : (2\cdot3) + 1^3] =$ [20]
40. $(7^2 - 2\cdot5 + 15:3):4 + (3\cdot2^2 + 3^2 - 4^2)^2 =$ [36]
41. $10^1 + (2 + 11 - 3^2)^2 - (2^2 + 4^2+ 6) =$ [0]
42. $5^1 + (8^2 - 5 \cdot 3^2 - 2^3) - 3^3 : (4^2 + 3 - 10) =$ [13]
43. $2^1 + 3^2 + 4^2 - 5^2 - 4^0 =$ [1]
44. $2^2 + 3^2 + 5^2 - 2\cdot3 - 8\cdot4 =$ [0]
45. $24 : (3\cdot2^2) + 2^2 \cdot (3^2 + 3^0 - 2^3) =$ [10]
46. $(5^2 - 3^2) : 2^2 + 9^0 \cdot 8^2 : 8^1 =$ [12]
47. $5 + 2 \cdot [5 + 2 \cdot (2^2 +5) : 3 - 3^2] - 2\cdot3 =$ [3]
48. $(2^3 + 2^4) : 2 + 13\cdot3 - 2^2\cdot5 =$ [31]
49. $(5^2 + 3^2 -1) : 3 + (3^3 + 1) : 7 =$ [15]
50. $[(7^5 \cdot 7^9) : (7^4)^3] : 7^2 =$ [1]
51. $(3\cdot4 + 2^3\cdot2 + 7\cdot6) : 10\cdot3 - 2^2\cdot5 =$ [1]
52. $(1^5 + 1^6 + 1^8 + 1^{10})\cdot4 - 2^4 =$ [0]
53. $3^2 + 4^2 + 2\cdot3 + (7 + 2) : 9 + (27 - 2) : 5 =$ [37]
54. $81 : 3^2 + 32 : 2^2 + 50 : 5^2 - (4\cdot2 - 2^3) : 3 =$ [19]
55. $(3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 - 10) : 6 + 6^2 : 6 =$ [11]
56. $\{[(2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3) : 4 + 1]\cdot8 - 24\} + 3 =$ [3]
57. $\{[(2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3) : 2^2 + 1]^3\cdot2 - 24\}^2 + 3 =$ [903]
58. $3\cdot2 + (2^3 : 2^2 + 3^2 : 3)\cdot5 - (6 : 2 + 44 : 4) : 7 =$ [29]
59. $\{16:(6^2 - 10\cdot2) + [(7\cdot3 + 3^3\cdot3 - 2)^2 : 10^3] : (7^2 - 11\cdot4)-2\}^5=$ [1]
60. $\{5\cdot16 - (6^2 - 2^4) - [(3^2 - 2^2) \cdot10 - 5]\} - [(2^2\cdot5 + 2^3) : (3^3-5^2)]=$ [1]
61. $[(2^2 \cdot 2^5) : (2 \cdot 2^3)]^2 =$ [64]
62. $[2 + 15 : (2^3\cdot5 - 3^3 + 2)]^4 : 3\cdot2 - 2\cdot (25 - 5\cdot12 : 3)^2 =$ [4]
63. $(2^2\cdot2)^2 :(5\cdot2^2 - 2^2)+[7^2 : (5^2 - 3^2\cdot2)+13^3:13^2]:2^2+(7^4\cdot7^2)^0 - 3^2=$ [1]
64. $5^2 : 5 \cdot [(3\cdot5^2 + 4 : 2) : 7 - 2 \cdot 5]^2 + 2^5 : 2^2 - 5^2 : 5 =$ [8]
65. $[13^6\cdot (13^5:13)]^2:[13^{13}:(13^2\cdot13^3)^2]^6 =$ [169]

Multipli e divisori

☺ ripassiamo

Definizione	*Esempio*
Un numero *n* è divisibile per un numero *m* quando la divisione di *n* per *m* ha resto 0	48 è divisibile per 8, 48 è multiplo di 8
Si dice che *m* è divisore, o sottomultiplo, di *n* se *n* è multiplo di *m*	8 è divisore di 48 8 è sottomultiplo di 48
Un numero primo è un numero diverso da 1 e divisibile solo per 1 e per se stesso	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... sono numeri primi
Un numero è composto se non è primo	4, 6, 9, 10, 15,... sono numeri composti
Un numero scomposto in fattori primi è un numero scritto come prodotti di potenze di numeri primi	$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $75 = 3 \cdot 5^2$
Due numeri si dicono primi fra loro se non hanno divisori comuni all'infuori di 1	4 e 15 ; 12 e 35

Attenzione

Criteri di divisibilità:

Un numero è divisibile per

- 2 se termina con cifra pari — es. 62, 84,..
- 3 o 9 se la somma delle sue cifre è multiplo di 3 o 9 — es. 12, 45
- 5 se termina con 0 o 5 — es. 20, 45
- 11 se la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari dà 0 o un multiplo di 11 — es. 121, 352
- 10, 100, 1000 se rispettivamente con 1, 2, 3,...zeri — es. 40, 400, ...

Es. 2530 è divisibile per: 2 (termina con 0 cifra pari)
5 (termina con 0)
11 (somma delle cifre di posto dispari 2+3=5
somma delle cifre di posto pari 5+0=5
differenza delle somme ottenute 5-5=0)
non è divisibile per: 3 (somma delle cifre = 2+5+3=10 non divisibile per 3)

Massimo comun divisore (M.C.D.)

Definizione	*Regola*	*Esempio*
E' il maggiore fra i divisori comuni.	Si ottiene scomponendo i numeri in fattori primi e prendendo **solo i fattori comuni**, una sola volta, con l'**esponente più piccolo**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\text{M.C.D.} = 2^2 \cdot 3 = 12$

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

Definizione	*Regola*	*Esempio*

E' il minore fra i multipli comuni.	Si ottiene scomponendo i numeri in fattori primi e prendendo **tutti i fattori, comuni e non comuni**, una sola volta, con **l'esponente più grande**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $m.c.m. = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

ESERCIZI:

66. Indica quali fra i seguenti numeri sono primi e quali composti: 87; 89; 93; 97

67. Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

800

315

660

1170

1848

2970

68. Trova il M.C.D. e il m.c.m. tra i seguenti gruppi di numeri:

(24; 30; 40)	[2; 120]
(9; 10; 15)	[1; 90]
(32; 64; 128)	[32; 128]
(36; 72; 108)	[36; 216]

69. Scrivi tutti i divisori dei seguenti numeri:

140

72

273

220

70. Scrivi tutti i multipli minori di 100 dei seguenti numeri

12

15

23

31

Domande	Risposte	Esempi
Quali numeri si dicono razionali?	I numeri la cui rappresentazione decimale è finita o illimitata periodica. Oppure tutti i numeri che possono essere espressi sotto forma di frazione, sia positivi che negativi. L'insieme dei numeri razionali si indica con la lettera **Q**	Sono numeri razionali: $+0{,}25$; $+1{,}\overline{3}$ $+\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$
Quando una frazione si dice ridotta ai minimi termini?	Quando il numeratore e il denominatore non sono più divisibili tra loro	Sono frazioni ridotte ai minimi termini: $\frac{12}{5}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{10}{3}$
Che cosa si intende per inverso o reciproco di un numero irrazionale?	Si intende quel numero che, moltiplicato per il numero dato, da come risultato 1. In pratica si ottiene capovolgendo la frazione di partenza	L'inverso di $+2$ è $+\frac{1}{2}$ L'inverso di $-\frac{2}{5}$ è $-\frac{5}{2}$

34

Numeri razionali

☺ ripassiamo

Attenzione

Non si deve confondere l'opposto di un numero con il suo reciproco.

per esempio: l'opposto di $+\frac{3}{5}$ è $-\frac{3}{5}$

il reciproco di $+\frac{3}{5}$ è $+\frac{5}{3}$

Passaggio da frazioni ai numeri decimali e viceversa

Da...a...	Regola	Esempio
Da frazione a numero decimale	Si esegue la divisione fra il numeratore e il denominatore	$\frac{3}{2}=3\div 2=1{,}5$ $\frac{1}{3}=1\div 3=0{,}3333...=0{,}\overline{3}$
Da numero decimale finito a frazione	Si scrive una frazione avente : ▪ a numeratore il numero scritto senza la virgola; ▪ a denominatore la potenza di 10 che ha tanti zeri quante sono le cifre decimali Si riduce la frazione ai minimi termini semplificando il numeratore e il denominatore ottenuti per eventuali divisori comuni	$1{,}25=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$ $5{,}4=\frac{54}{10}=\frac{27}{5}$

Da numero illimitato periodico a frazione	Si scrive una frazione avente : ▪ a numeratore la differenza tra il numero scritto senza virgola e la parte che viene prima del periodo ▪ a denominatore tanti 9 quante sono le cifre periodiche seguiti da tanti 0 quante sono le cifre decimali non periodiche. Si riduce la frazione ai minimi termini	$1,\bar{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ $2,3\bar{5}=\frac{235-23}{90}=\frac{212}{90}=\frac{106}{45}$ $0,10\bar{4}=\frac{104-10}{900}=\frac{94}{900}=\frac{47}{450}$

ESERCIZI:

71. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni : $\frac{36}{48}$; $\frac{30}{54}$; $\frac{18}{81}$; $\frac{75}{12}$; $\frac{49}{21}$; $\frac{45}{120}$; $\frac{473}{22}$.

72. Completa la seguente tabella:

Numero	Opposto	Reciproco	Opposto del reciproco
$\frac{5}{6}$			
	$-\frac{2}{3}$		
$+\frac{1}{4}$			
		$-\frac{1}{3}$	
			$-\frac{4}{15}$

73. Trasforma in numeri decimali le seguenti frazioni: $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{4}{7}$.

74. Esprimi i seguenti numeri razionali tramite una frazione ridotta ai minimi termini:

$0,2$; $1,0\bar{5}$; $3,4$; $1,\bar{3}$; $0,0012$; $2,5\bar{1}$; $0,15$; $0,\overline{15}$; $0,1\bar{5}$; $1,0\bar{2}$; $2,6$; $0,6\bar{3}$.

75. Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

$+2,3$ $\quad +2,03$ $\quad +2,\bar{3}$ $\quad +2,33$ $\quad +2,\overline{03}$ $\quad +2,0\bar{3}$

76. Disponi in ordine crescente le seguenti frazioni:

$\frac{2}{5}$; $\frac{5}{2}$; 2; $\frac{4}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{6}{4}$; 0; $\frac{3}{5}$.

77. Disponi in ordine decrescente le seguenti frazioni:

$\frac{9}{6}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{6}$; 1; $\frac{15}{10}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{2}{3}$.

Operazioni con le frazioni

☺ ripassiamo

Operazione	*Regola*	*Esempio*
Addizione e sottrazione	Si calcola il m.c.m. dei denominatori, lo si divide per il denominatore di ciascuna frazione e si moltiplica il risultato per il numeratore corrispondente. Si ottiene una frazione che ha al numeratore la somma o la differenza dei termini ottenuti al numeratore e a denominatore il m.c.m. calcolato in precedenza	$\frac{2}{9}+\frac{7}{6}=\frac{2\cdot2+3\cdot7}{18}=\frac{4+21}{18}=\frac{25}{18}$ $\frac{2}{9}-\frac{5}{12}=\frac{4\cdot2-3\cdot5}{36}=\frac{8-15}{36}=-\frac{7}{36}$ $3+\frac{2}{7}=\frac{7\cdot3+1\cdot2}{7}=\frac{21+2}{7}=\frac{23}{7}$
Moltiplicazione	Si scrive una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori dopo aver fatto tutte le possibili semplificazioni tra i numeratori e i denominatori delle frazioni date	$\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{21}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$
Divisione	Si moltiplica la prima frazione per l'inversa della seconda	$\frac{3}{10}\div\frac{6}{5}=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
Potenza	Si elevano a potenza sia il numeratore che il denominatore facendo attenzione al segno che sarà sempre positivo se l'esponente è pari e rimarrà uguale al segno di partenza se l'esponente è dispari. Se l'esponente è negativo si capovolge la frazione e si cambia il segno dell'esponente, poi si procede come indicato prima	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^2=+\frac{3^2}{5^2}=+\frac{9}{25}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{2^3}{3^3}=-\frac{8}{27}$ $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1}=\left(-\frac{4}{5}\right)^1=-\frac{4}{5}$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}=\left(-\frac{5}{3}\right)^2=+\frac{5^2}{3^2}=+\frac{25}{9}$

Attenzione

Un numero intero può sempre essere visto come una frazione avente per denominatore il numero 1

Es. $5=\frac{5}{1}$ $\qquad -2=-\frac{2}{1}$

ESERCIZI:

78. $\left[\left(5-\frac{3}{7}\right)\cdot 5-\left(\frac{32}{7}-4\right)\div\frac{1}{5}\right]\div\frac{5}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{10}{3}=$ [20]

79. $\left\{\left[\frac{5}{7}+\frac{11}{6}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]\times\frac{21}{19}-\left(\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\right)\times\frac{4}{5}\right\}\div 3-\frac{1}{2}=$ $\left[\frac{3}{10}\right]$

80. $\left[\left(\frac{15}{25}-\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{9}{12}+\left(\frac{4}{15}-\frac{11}{45}\right)\cdot\frac{10}{2}\right]\div\frac{7}{9}=$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

81. $\left[\left(\frac{9}{12}+\frac{10}{4}\right)\div\frac{26}{4}+\left(\frac{10}{8}-\frac{21}{18}\right)\div\frac{10}{12}\right]\cdot\left[\left(\frac{9}{15}+\frac{4}{2}-\frac{5}{3}\right)\div\frac{35}{45}\right]=$ $\left[\frac{18}{25}\right]$

82. $\left(1-\frac{5}{7}\right)\cdot\left[\left(3-\frac{6}{7}-\frac{5}{14}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}-\frac{3}{7}\right)-\frac{5}{12}\right]=$ $\left[\frac{35}{6}\right]$

83. $\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{7}\right)\div\left(\frac{10}{12}+\frac{4}{9}-1\right)\right]\div\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\right)\div\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{5}\right]\right\}-\frac{1}{2}=$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

84. $\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8}\right]\div\left\{\left[\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{6}-\frac{5}{14}\right)\cdot\left(5+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{4}\right\}+\frac{1}{2}=$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

85. $\left(3+\frac{6}{8}-\frac{14}{7}\right)\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{24}=$ [0]

86. $\frac{21}{26}\div\frac{7}{13}+3\cdot\frac{5}{6}+\left(1-\frac{3}{4}\right)-\left(1-\frac{9}{28}\right)=$ $\left[\frac{25}{7}\right]$

87. $\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{34}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]\div\frac{3}{2}+\frac{5}{7}\div\left(1+\frac{2}{7}\right)-\frac{1}{3}=$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

88. $\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]\div\left(3+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)\div 8=$ $\left[\frac{7}{24}\right]$

89. $5+\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}:\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{7}-3:\left(2+\frac{4}{3}\right)=$ $\left[\frac{21}{30}\right]$

90. $\left\{\frac{1}{7}\cdot\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{19}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right]+\frac{4}{5}\div 2\right\}\cdot\frac{15}{28}=$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

91. $\left\{\left[\frac{4}{7}+\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{5}{56}+\frac{5}{28}\div\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\div\frac{4}{7}-\frac{5}{12}\right\}\div\frac{13}{36}-\frac{15}{28}\div\frac{5}{28}=$ [0]

92. $\left\{\frac{5}{6}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{9}\right)-\left(1-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{2}{3}\div\frac{8}{9}\right\}\cdot\frac{36}{37}=$ [1]

Proporzioni

S i definisce proporzione l'uguaglianza fra i rapporti di due numeri e si indica:

$$\mathbf{a:b=c:d} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$$

Questa *relazione* si legge: **a sta a b, come c sta a d** .I numeri *a, b, c, d* si dicono **termini della proporzione** e in particolare *a* e *c* si dicono **antecedenti della proporzione,** *b* e *d* **conseguenti della proporzione** e devono essere diversi da 0, *a* e *d* **estremi della proporzione,** *b* e *c* **medi della proporzione**; infine *d* è detto **quarto proporzionale** che segue *a, b* e *c*.

Proprietà	*Enunciato*	*Esempio*
Fondamentale	il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.	$a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$
Regola del quarto proporzionale	Noti tre numeri *a,b,c*, il quarto proporzionale, d, tale che $a:b=c:d$, si ottiene moltiplicando i due medi e dividendo il risultato per l'altro estremo. Similmente si hanno le altre formule	$d=\frac{b\cdot c}{a}$ $a=\frac{b\cdot c}{d}$ $b=\frac{a\cdot d}{c}$ $c=\frac{a\cdot d}{b}$
Proprietà dell'invertire	Data una quaterna proporzionale, se ne ottiene un'altra scambiando tra loro ogni antecedente con il proprio conseguente	$a:b=c:d \Rightarrow b:a=d:c$
Proprietà del permutare	Data una quaterna proporzionale se ne ottiene un'altra scambiando tra loro o i medi o gli estremi	$a:b=c:d \Rightarrow a:c=b:d$ $a:b=c:d \Rightarrow d:b=c:a$
Proprietà del comporre	In ogni quaterna proporzionale la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente	$a:b=c:d \Rightarrow$ $(a+c):(b+d)=a:b$ $a:b=c:d \Rightarrow$ $(a+c):(b+d)=c:d$
Proprietà dello scomporre	In ogni quaterna proporzionale la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente	$a:b=c:d \Rightarrow$ $(a-c):(b-d)=a:b$ $a:b=c:d \Rightarrow$ $(a-c):(b-d)=a:b$
Regola del medio proporzionale	Si applica quando i due medi di una quaterna proporzionale coincidono, cioè quando $a:b=b:d$ cioè $b^2=a\cdot d$	$b=\sqrt{a\cdot d}$

IMPORTANTE: Dalla proprietà fondamentale si ricava la regola della **moltiplicazione in croce** che serve per ricavare le formule inverse. Tale regola consente di ricavare il termine incognito di una formula e si basa sul principio che un termine che passa dalla parte opposta dell'uguale si sposta da numeratore a denominatore e viceversa.

Esempio: Siano A, b, h, rispettivamente area, base, altezza di un rettangolo. si ha:

$$\mathbf{A = b \cdot h} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{b = \frac{A}{h}} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{h = \frac{A}{b}}$$

ESERCIZI:

93. $4 : 7 = x : 14 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \cdot 14 : 7 \quad \Rightarrow \quad x = 8$
94. $3 : 4 = 9 : x$
95. $4 : x = 12 : 18$
96. $10 : 5 = 30 : x$
97. $27 : x = 39 : 52$
98. $14 : 91 = x : 26$
99. $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{5}{6} : x$
100. $x : \frac{15}{4} = 1 : \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{45}{28}$
101. $\frac{5}{6} \div \frac{3}{16} = x \div \frac{9}{4}$
102. $\frac{2}{3} : \frac{7}{11} = x : \frac{14}{5}$
103. $\frac{11}{3} : \frac{22}{7} = x : \frac{14}{5}$
104. $3{,}5 \div 3{,}\overline{8} = 6{,}3 \div x$
105. $x : \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = \left(3 + \frac{1}{3}\right) : \left(1 + \frac{3}{2}\right)$ $\quad x = \frac{8}{3}$
106. $\left(8 - \frac{16}{5}\right) : \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \left(4 - \frac{8}{11}\right) : x$
107. $(35-x) : x = 4 : 3 \quad \Rightarrow \quad (35-x+x) : x = (4+3) : 3 \quad \Rightarrow \quad 35 : x = 7 : 3 \quad \Rightarrow \quad x = 15$

108. $(8+x) : x = 5 : 3$ [12]
109. $(18+x) : x = 16 : 8$ [2]
110. $(14-x) : x = 5 : 9$ [9]
111. $(14-x) : x = 27 : 15$ [5]
112. $2 : x = 9 : (21+x)$ [6]
113. $(36+x) : 12 = x : 3$ [12]
114. $x : 3 = (68+x) : 20$ [12]

115. $3 : x = x : 27 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$
116. $4 : x = x : 81$
117. $2 : x = x : 50$
118. $x : 3 = 12 : x$
119. $24 : x = x : 54$

Equivalenze

misure di lunghezza	Km	hm	dam	m	dm	cm	mm

IMPORTANTE: Quando mi sposto verso destra moltiplico per 10
Quando mi sposto verso sinistra divido per 10

Esegui le equivalenze: misure di lunghezza.

120. 0,9 km = __________ dam   28,5 m = __________ cm

121. 0,07 hm = __________ m   2 mm = __________ cm

122. 9,5 dm = __________ cm   4 dm = __________ cm

123. 69,8 m = __________ dam   99 km = __________ hm

124. 8 dm = __________ cm   960 dm = __________ m

125. 0,01 m = __________ mm   5,6 cm = __________ m

126. 5 hm = __________ km   63 km = __________ dam

127. 1,02 hm = __________ dam   18,9 km = __________ dam

128. 92 cm = __________ dm   76 hm = __________ m

129. 0,1 dam = __________ m   0,5 m = __________ hm

misure di capacità	Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

IMPORTANTE: Quando mi sposto verso destra moltiplico per 10
Quando mi sposto verso sinistra divido per 10

Esegui le equivalenze: misure di capacità.

130. 0,9 dl = __________ cl   0,6 dal = __________ hl

131. 5,3 cl = __________ cl   8 dal = __________ l

132. 431 ml = __________ dl   3 cl = __________ l

133. 0,56 hl = __________ l

46,4 dl = __________ cl

134. 0,03 dal = __________ hl

0,31 dl = __________ cl

135. 0,07 dal = __________ l

0,82 hl = __________ l

136. 0,96 hl = __________ dal

64,2 dl = __________ l

137. 0,08 l = __________ ml

43,2 dl = __________ cl

misure di massa	t	q	Mg	Kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

IMPORTANTE: Quando mi sposto verso destra moltiplico per 10
Quando mi sposto verso sinistra divido per 10

Esegui le equivalenze: misure di peso.

138. cg 31,2 = __________ g

5.780 dag = __________ hg

139. 45 mg = __________ dg

62 Kg = __________ dag

140. 904 g = __________ dag

87,23 g = __________ hg

141. 5.000 g = __________ dg

17,8 g = __________ cg

142. 68 Kg = __________ hg

0,4 hg = __________ g

143. 0,5 Kg = __________ Mg

16 Mg = __________ dag

144. 3,8 Mg = __________ kg

797 g = __________ dg

145. 0,2 Kg = __________ g

3 hg = __________ cg

Tabella di conversione	capacità	1000 litri	1 litro	1 ml
	volume	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3

IMPORTANTE: Quando mi sposto verso destra moltiplico per 1000
Quando mi sposto verso sinistra divido per 1000

146. 5,01 dl = __________ l = __________ dm^3

147. 0,5 hl = __________ l = __________ m^3

148. 42 ml = __________ l = __________ cm^3

149. 523 dl = __________ l = __________ m^3

150. 0,08 hl = __________ l = __________ dm^3

151. 36,8 l = __________ dal = __________ cm^3

152. 5,3 m^3 = ______________ l = ____________ dal

153. 4 cl = ____________ cm^3= = ______________ l

154. 63,9 m^3= ____________ dal = ______________ hl

155. 3,65 dm^3= ______________ l = ______________ hl